UYGULAMA

$a \neq 0$ sabit olmak üzere $f(x,y) = \frac{2a}{x} + \frac{a}{y} + 4a^4xy$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz.

$f_x(x,y) = -2 \cdot \frac{a}{x^2} + 4a^4y$ $\quad f_x(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{2a}{x^2} = 4a^4y \Rightarrow 2a = 4a^4yx^2$

$f_y(x,y) = -\frac{a}{y^2} + 4a^4x$ $\quad f_y(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{a}{y^2} = 4a^4x \Rightarrow 2a = 8a^4xy^2$

olup $a \neq 0$ için

$4a^4yx^2 = 8a^4xy^2$ eşitliğinden $yx^2 = 2xy^2$ elde edilir. $x \neq 0, y \neq 0$

olduğundan $x = 2y$ bulunur.

$a = 4a^4xy^2 \Rightarrow a = 4a^4 2y \cdot y^2 \Rightarrow a = 8a^4y^3 \underset{a \neq 0}{\Rightarrow} 8a^3y^3 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2a}$

$x = 2y \Rightarrow x = 2 \cdot \frac{1}{2a} = \frac{1}{a}$

$(x,y) = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{2a}\right)$ Kritik Nokta

$f_{xx}(x,y) = \frac{4a}{x^3} \Rightarrow f_{xx}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{2a}\right) = \frac{4a}{\frac{1}{a^3}} = 4a^4$

$f_{xy}(x,y) = 4a^4 \Rightarrow f_{xy}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{2a}\right) = 4a^4$

$f_{yy}(x,y) = \frac{2a}{y^3} \Rightarrow f_{yy}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{2a}\right) = \frac{2a}{\frac{1}{8a^3}} = 16a^4$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = (4a^4)^2 - 4a^4 \cdot 16a^4 = 16a^8 - 64a^8 = -48a^8 < 0 \\ f_{xx}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{2a}\right) = 4a^4 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{2a}\right) \text{ yerel minimum nokta}$$

2) $f(x,y) = x.\left((\ln x)^2 + y^2\right)$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz.

$$f_x(x,y) = \left((\ln x)^2 + y^2\right) + x.\,2.(\ln x).\frac{1}{x} = (\ln x)^2 + y^2 + 2\ln x = 0$$

$$f_y(x,y) = 2xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ veya } y = 0$$

$x=0$ olamaz, çünkü $\ln x$ fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için $x>0$ olmalıdır.

Dolayısıyla $y=0$ dır. Bu durumda $f_x(x,y)=0$ ve $y=0$ eşitliklerinden $(\ln x)^2 + 2\ln x = 0$ elde edilir.

$\ln x = u$ diyelim.

$$u^2 + 2u = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ veya } u = -2$$

$$\Rightarrow \ln x = 0 \text{ veya } \ln x = -2$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ veye } x = e^{-2}$$

$A(1,0)$ ve $B(e^{-2},0)$ kritik noktalar

$$f_{xx}(x,y) = 2(\ln x).\frac{1}{x} + \frac{2}{x}$$

$$f_{xy}(x,y) = 2y$$

$$f_{yy}(x,y) = 2x$$

$A(1,0)$ için $f_{xx}(1,0) = 2$, $f_{xy}(1,0) = 0$, $f_{yy}(1,0) = 2$ dir.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = 0 - 2.2 = -4 < 0 \\ f_{xx}(1,0) = 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(1,0) \text{ Min. nokta}$$

$B(e^{-2},0)$ için $f_{xx}(e^{-2},0) = -2e^2$, $f_{xy}(e^{-2},0) = 0$, $f_{yy}(e^{-2},0) = 2e^{-2}$ dir.

$$\Delta = 0 - (-2e^2).(2e^{-2}) = 4 > 0 \Rightarrow B(e^{-2},0) \text{ eyer noktası}$$

SORU: $x^2+y^2+z^2=1$ küresindeki (x,y,z) noktasının santigrad cinsinden sıcaklığı $T(x,y,z)=400xyz^2$ dir. Küredeki en yüksek ve en düşük sıcaklıkların yerini bulunuz.

Çözüm: $T(x,y,z)=400xyz^2$

$$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x} \Rightarrow 400yz^2=\lambda\cdot 2x \Rightarrow \lambda x=200yz^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y} \Rightarrow 400xz^2=\lambda\cdot 2y \Rightarrow \lambda y=200xz^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}=\lambda\frac{\partial g}{\partial z} \Rightarrow 800xyz=\lambda\cdot 2z \Rightarrow \lambda z=400xyz$$

$z\neq 0$ ise $\lambda=400xy$

$$400xy\,x=200yz^2$$

$y\neq 0$ ise $2x^2=z^2 \Rightarrow \boxed{x=\mp\frac{z}{\sqrt{2}}}$

$$400xy\,y=200xz^2$$

$x\neq 0$ ise $2y^2=z^2 \Rightarrow \boxed{y=\mp\frac{z}{\sqrt{2}}}$

$$x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow \frac{z^2}{2}+\frac{z^2}{2}+z^2=1 \Rightarrow 2z^2=1$$

$$\Rightarrow z^2=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{z=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$T\left(\mp\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mp 50$$

$z=0,\ y=0 \Rightarrow x=\mp 1$ $\quad T(\mp 1,0,0)=0$

$z=0,\ x=0 \Rightarrow y=\mp 1$ $\quad T(0,\mp 1,0)=0$

$z=0 \Rightarrow \lambda x=0 \vee \lambda y=0$

$\lambda=0 \Rightarrow x\neq 0 \quad y\neq 0$

Soru: $2y+4z=5$ düzlemi ile $z^2=4x^2+4y^2$ konisinin kesişim eğrisi üzerinde orijine en yakın noktayı bulunuz.

Çözüm: $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$g_1(x,y,z)=2y+4z-5=0$

$g_2(x,y,z)=z^2-4x^2-4y^2=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda_1\cdot\frac{\partial g_1}{\partial x}+\lambda_2\cdot\frac{\partial g_2}{\partial x} \Rightarrow 2x=\lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot(-8x)$$

$$\Rightarrow 2x=-8\lambda_2 x \Rightarrow x=-4\lambda_2 x$$

$$\Rightarrow (1+4\lambda_2)x=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lambda_1\cdot\frac{\partial g_1}{\partial y}+\lambda_2\cdot\frac{\partial g_2}{\partial y} \Rightarrow 2y=\lambda_1\cdot 2+\lambda_2\cdot(-8y)$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\lambda_1-4\lambda_2 y} \Rightarrow (1+4\lambda_2)y=\lambda_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\lambda_1\cdot\frac{\partial g_1}{\partial z}+\lambda_2\cdot\frac{\partial g_2}{\partial z} \Rightarrow 2z=\lambda_1\cdot 4+\lambda_2\cdot 2z$$

$$\Rightarrow \boxed{z=2\lambda_1+z\lambda_2}$$

$$(1-\lambda_2)z=2\lambda_1$$

$x=0 \Rightarrow z^2=(2y)^2 \Rightarrow z=\mp 2y$

$z=-2y \Rightarrow 2y-8y=5 \Rightarrow -5=6y \Rightarrow y=\frac{-5}{6}$

$z=\frac{5}{3}$

$\left(0,-\frac{5}{6},\frac{5}{3}\right)$

$z=2y \Rightarrow 2y+8y=5 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$ $\quad z=1$

$\left(0,\frac{1}{2},1\right)$

$\lambda_2=-\frac{1}{4} \Rightarrow y=\lambda_1+y \Rightarrow \lambda_1=0$

$\Rightarrow (1-\lambda_2)\, z=0$

$\overset{\lambda_2\neq 1}{\Rightarrow} z=0$

$\Rightarrow y=\frac{5}{2}$ $\quad 0=4x^2+4\left(\frac{5}{2}\right)^2$

x yok

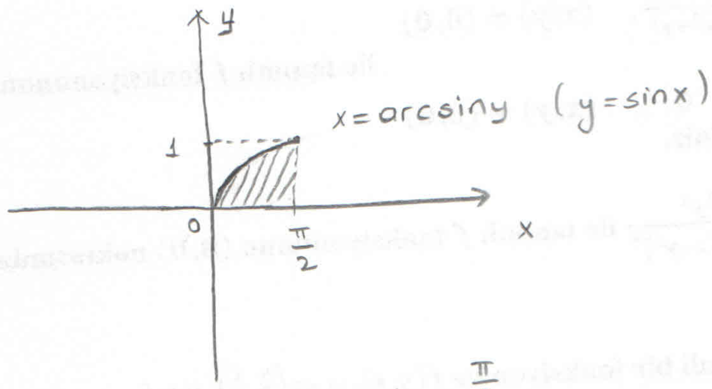
en yakın

$$\boxed{f\left(0,-\frac{5}{6},\frac{5}{3}\right)=\frac{125}{36}, \quad f\left(0,\frac{1}{2},1\right)=\frac{5}{4}}$$

Problem: $\displaystyle\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} e^{\cos x}\, dx\, dy$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $x = \arcsin y$

$x = \frac{\pi}{2}$



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} e^{\cos x}\, dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\, y \Big|_0^{\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x \, dx$$

$\cos x = u$

$-\sin x dx = du$

$\sin x dx = -du$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$$= \int_1^0 e^u (-du) = -\int_1^0 e^u du$$

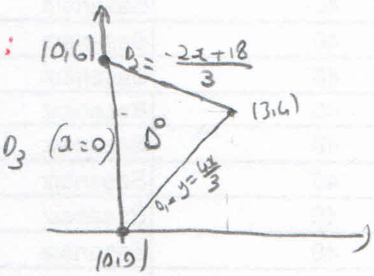
$$= \int_0^1 e^u du$$

$$= e^u \Big|_0^1$$

$$= e - 1$$

Soru: $f(x,y) = x^2+y^2+4xy-5x+3y$ fonksiyonunun köşeleri $(0,0)$, $(3,4)$ ve $(0,6)$ dan üçgensel bölge üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm:



$m_{D_1} = \frac{4}{3}$ $\quad (y-0) = \frac{4}{3}(x-0)$

$m_{D_2} = \frac{6-4}{-3} = -\frac{2}{3}$ $\quad (y-6) = -\frac{2}{3}x$

D_2 $y = \frac{-2x+18}{3}$

Üçgensel bölgenin içi için;

$D_1 f(x,y) = 2x+4y-5$, $\quad D_2 f(x,y) = 2y+4x+3$ olup

$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x+4y-5,\ 2y+4x+3) = (0,0)$ olur.

$$\begin{cases} 2x+4y-5=0 \\ 2y+4x+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x-8y+10=0 \\ 2y+4x+3=0 \end{cases}$$
$$+\quad -6y = -13 \Rightarrow y = \frac{13}{6}, \quad 2x + \frac{26}{3} = 5$$

$\Rightarrow x = -\frac{11}{6}$ olup $\left(-\frac{11}{6}, \frac{13}{6}\right) \notin D^\circ$ dir. Ekstremum olmaz.

Şimdi üçgenin kenarları için inceleme yapalım.

D_3 doğru parçası için; $(0,y)$, $0 \le y \le 6$ durumu vardır.

$f(0,y) = y^2+3y$ olup $f' = 2y+3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \notin [0,6]$ dır.

D_2 doğru parçası için; $\left(x, \frac{-2x+18}{3}\right)$, $0 \le x \le 3$ olup

$$f\left(x, \frac{-2x+18}{3}\right) = x^2 + \left(\frac{-2x+18}{3}\right)^2 + 4x\left(\frac{-2x+18}{3}\right) - 5x + 3\left(\frac{-2x+18}{3}\right)$$

$$= x^2 + \frac{4x^2-72x+18^2}{3} + \frac{-8x^2+4.18x}{3} - 5x - 2x + 18$$

$$= \frac{3x^2+4x^2-72x+18^2-24x^2+12.18x-63x+3.18}{3}$$

$$= \frac{-11x^2+81x+486}{3}$$

$f' = \frac{-22x+81}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{81}{22} \notin [0,3]$ olur.

D_1 doğru parçası için; $\left(x, \frac{4x}{3}\right)$, $0 \le x \le 3$

$$f\left(x, \frac{4x}{3}\right) = x^2 + \frac{16x^2}{9} + \frac{16x^2}{3} - 5x + \underbrace{4x}_{-x} = \frac{9x^2+64x^2-9x}{9} = \frac{73x^2-9x}{9}$$

olup, $f' = \frac{146x-3}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{146} \in [0,3]$ dır

$y = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{146} = \frac{6}{73}$ dür. $f\left(\frac{3}{146}, \frac{6}{73}\right) = -\frac{3}{292}$ dır.

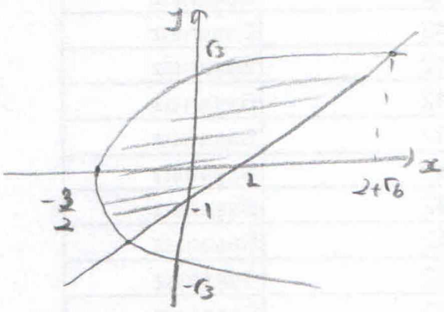
$f(0,0) = 0$, $f(0,6) = 36 + 18 = 54$

$f(3,4) = 3 + 16 + 4 \cdot 12 - 15 + 12 = 10 + 48 + 12 = 70$

dur. O halde f nin maksimum değeri 70 minimum değeri $-\frac{3}{292}$ dir.

Soru: $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2 + 2x + 3$ fonksiyonunun $y^2 = 2x+3$ parabolü ve $y = x-1$ doğrusu arasında kalan bölge üzerinde maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm: $y^2 = 2x+3 \Rightarrow x = \frac{y^2}{2} - \frac{3}{2}$ parabolü $y = x-1$ doğrusu



$y^2 = 2x+3$ ile $y = x-1$ ortak çözülürse

$(x-1)^2 = 2x+3 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x + 3$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$

$\Delta = 16 + 8 = 24$

$x_{1,2} = \frac{4 \mp 2\sqrt{6}}{2} = 2 \mp \sqrt{6}$

Bölgenin içine D^0 denirse $\operatorname{grad} f(x,y) = (4x+2, -6y) = (0,0)$

$\Rightarrow y = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ olup $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \in D^0$ dır.

$D_1^2 f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = 4$ $D_2^2 f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -6$ $D_1 D_2 f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = 0$

olup $\Delta = D_1^2 f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cdot D_2^2 f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) - 0 = -24 < 0$ nokta ekstremum değildir.

$y^2 = 2x+3$ parabolü için;

$f(x) = 2x^2 - 3(2x+3) + 2x + 3$

$= 2x^2 - 6x - 9 + 2x + 3$

$= 2x^2 - 4x - 6$ $\Rightarrow$ $f'(x) = 4x - 4 = 0$

$\Rightarrow x = 1$

$y^2 = 5 \Rightarrow y = \mp\sqrt{5}$, $(1, -\sqrt{5}) \notin D$, $\boxed{f(1, \sqrt{5}) = -8}$

$y = x-1$, $2-\sqrt{6} \le x \le 2+\sqrt{6}$ doğru parçası için

$$f(x, x-1) = 2x^2 - 3(x-1)^2 + 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad f' = -2x+8 = 0$$
$$= 2x^2 - 3x^2 + 6x - 3 + 2x + 3 \quad \Rightarrow x = +4$$
$$= -x^2 + 8x$$

$x = 4 \Rightarrow y = 3$ olup $(4,3) \in D$, $f(4,3) = 16$

Son olarak $(2-\sqrt{6}, 1-\sqrt{6})$, $(2+\sqrt{6}, 1+\sqrt{6})$ noktaları için;

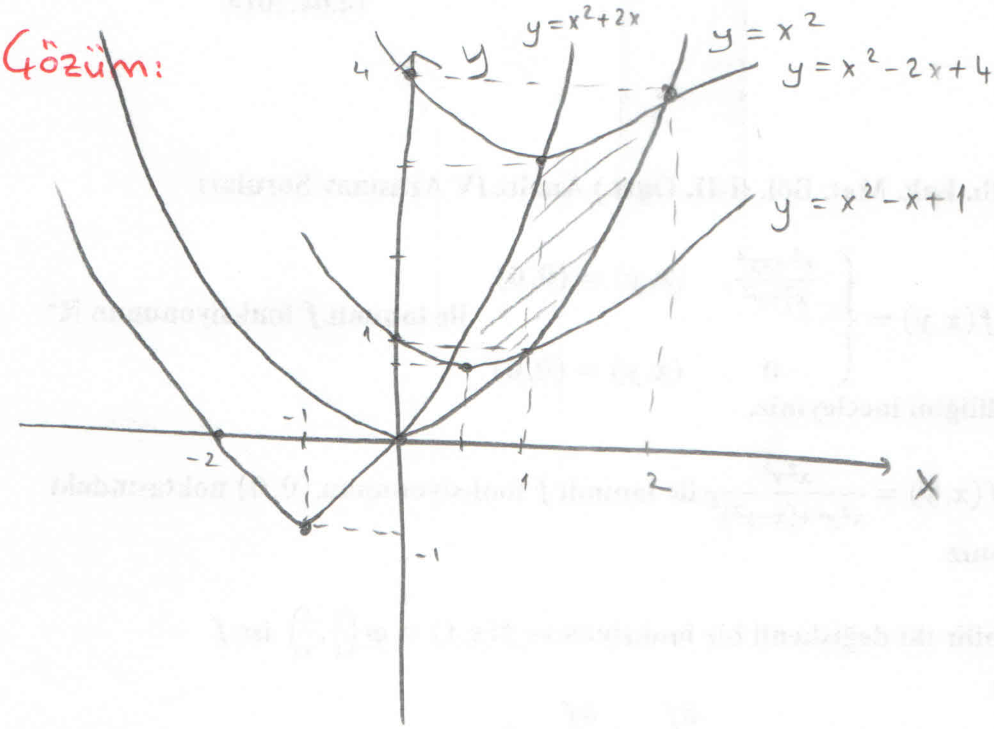
$$f(2-\sqrt{6}, 1-\sqrt{6}) = -(2-\sqrt{6})^2 + 8(2-\sqrt{6}) = -4 + 4\sqrt{6} - 6 + 16 - 8\sqrt{6}$$
$$= 6 - 4\sqrt{6}$$

$$f(2+\sqrt{6}, 1+\sqrt{6}) = -(2+\sqrt{6})^2 + 8(2+\sqrt{6})$$
$$= -4 - 4\sqrt{6} - 6 + 16 + 8\sqrt{6}$$
$$= 6 + 4\sqrt{6}$$

f nin minimum değeri -8, maksimum değeri 16 dır.

Problem: D bölgesi, $y=x^2$, $y=x^2+2x$, $y=x^2-2x+4$ ve $y=x^2-x+1$ eğrileri ile sınırlanmış olmak üzere $\iint_D x\,dA=?$

Çözüm:



$y=x^2+2x$

$y=(x+1)^2-1$

$y=x^2-2x+4$

$y=(x-1)^2+3$

$y=x^2-x+1$

$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

$u=y-x^2 \qquad v=x^2+2x-y$

$v=(x^2-y)+2x=-u+2x \Rightarrow 2x=u+v \Rightarrow \boxed{x=\frac{u+v}{2}}$

$y=x^2+2x-v$

$y=\frac{(u+v)^2}{4}+u+v-v$

$\boxed{y=\frac{(u+v)^2}{4}+u}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{2(u+v)}{4}+1 & \frac{2(u+v)}{4}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

$y=x^2 \Rightarrow u=0$

$y=x^2+2x \Rightarrow v=0$

$y=x^2-2x+4 \Rightarrow y-x^2+2x=4 \Rightarrow 2u+v=4$

$y=x^2-x+1 \Rightarrow y-x^2+x=1 \Rightarrow 3u+v=2$

$\Rightarrow u=-2,\ v=8$

$$\iint_D x\,dA=\int_0^8\int_{-2}^0 \frac{u+v}{2}\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv=\frac{1}{4}\int_0^8\left(\frac{u^2}{2}+vu\right)\Bigg|_{-2}^{0}dv$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^8 -(2-2v)\,dv=\frac{1}{4}\left(-2v+v^2\right)\Big|_0^8=12$$

INTEGRAL

1-) R bölgesi, $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=4$ hiperbolleri ile $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=16$ çemberlerinin arasında kalan bölge olsun. $x\geq 0, y\geq 0$ olmak üzere $\iint\limits_B xy\,dy\,dx$ integralini $u=x^2-y^2$, $v=x^2+y^2$ dönüşümleri yardımıyla çözünüz.

Çözüm:

$$\left.\begin{aligned} u&=x^2-y^2 \\ v&=x^2+y^2 \end{aligned}\right\}$$

$x^2-y^2=1 \Rightarrow u=1$ $\qquad$ $x^2+y^2=9 \Rightarrow v=9$

$x^2-y^2=4 \Rightarrow u=4$ $\qquad$ $x^2+y^2=16 \Rightarrow v=16$

$$\left.\begin{aligned} u+v=2x^2 \Rightarrow x=\mp\sqrt{\frac{u+v}{2}} \\ x\geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{u+v}}{\sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{aligned} u-v=-2y^2 \Rightarrow y=\mp\sqrt{\frac{v-u}{2}} \\ y\geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{v-u}}{\sqrt{2}}$$

$$|J|=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u+v}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u+v}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{2\sqrt{v-u}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{2\sqrt{v-u}} \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{v^2-u^2}}+\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{v^2-u^2}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{v^2-u^2}}$$

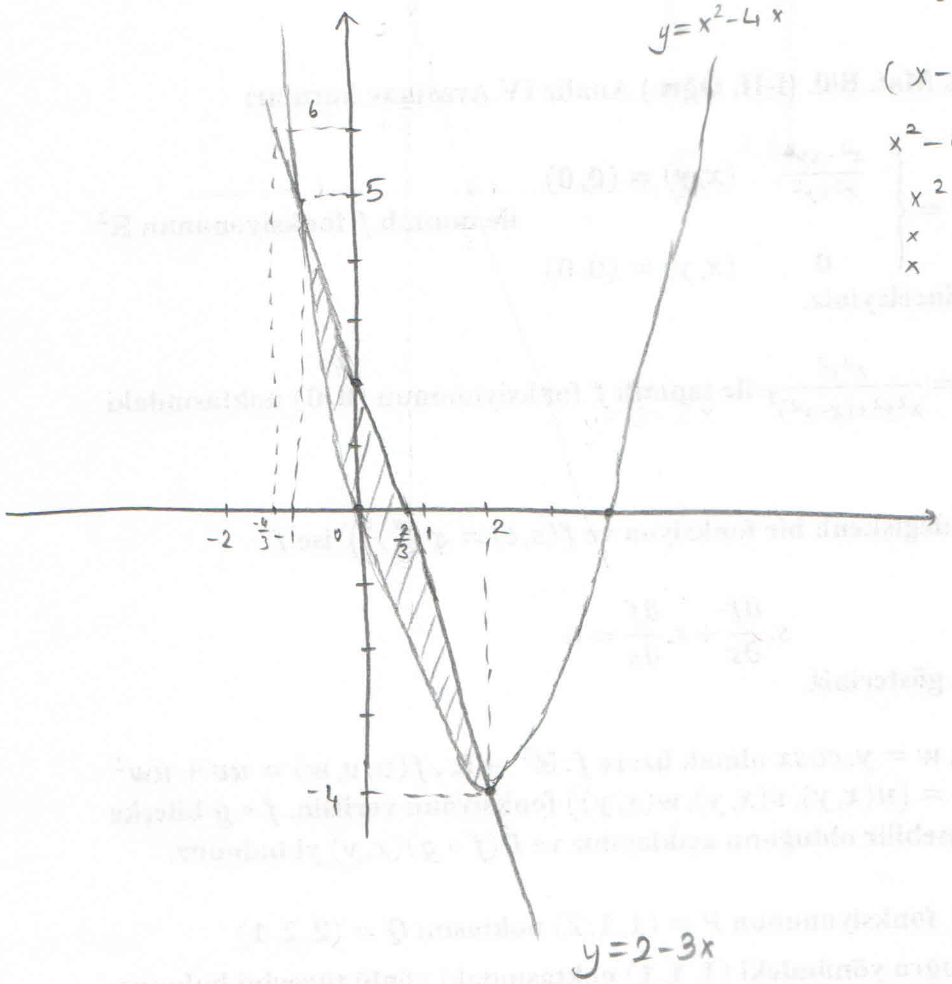
$$\iint\limits_R xy\,dy\,dx = \int_9^{16}\int_1^4 \frac{\sqrt{u+v}}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{v-u}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{4\sqrt{v^2-u^2}}\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{8}\int_9^{16} 3\,dv = \frac{1}{8}\cdot 3\cdot 7 = \frac{21}{8}$$

Problem: $y = 2-3x$ doğrusu ve $y = x^2-4x$ eğrisi ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz

Çözüm:

$$y = x^2-4x = (x-2)^2-4$$



$$(x-2)^2-4 = 2-3x$$

$$x^2-4x+\cancel{4}-\cancel{4} = 2-3x$$

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0$$

$$\begin{array}{cc} x & -2 \\ x & +1 \end{array} \quad \Rightarrow x=2, \; x=-1$$

$$y=-4, \; y=5$$

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2-4x}^{2-3x} 1 \, dy\, dx = \int_{-1}^{2} 2-3x-x^2+4x \, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} 2-x^2+x \, dx$$

$$= \left(2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= 4-\frac{8}{3}+2-\left(-2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= 6-\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$$

$$= 8-3-\frac{1}{2} = 5-\frac{1}{2} = \frac{9}{2} \,//$$